数理解析研究所講究録
708巻 1989年 86-96

LINEAR FORMS IN LOGARITHMS

平田典子（奈良女子大 理学部）
Noriko HIRATA-KOHNO
Dept. of Math., Nara Women's Univ.,
Kita-Uoya-Nishi-Machi
Nara 630

要約

代数体上定義された可換代数群の指数写像の代数点に関する代数的数係数の一次式の値が0でないとき、その絶対値を下から評価するという問題を考える。Alain BAKERは代数的数のlogarithmsの値の代数的数係数の一次結合の値を下から評価したが、その楕円関数への翻訳、そしてアーベル多様体、代数群への拡張がD.W.Masser, M.Anderson, J.Coates, S.Lang, D.Bertrand, G.Wüstholz, P.Philippon, M.Waldschmidt, Yu Kunruiらによって行なわれた。ここではこの問題に

関して今まで最良であった Philippon-Waldschmidt の評価の改良について述べる。

§1 定性的な結果

G. Wüstholz は [Wü] の中で A. Baker の代数的数の logarithms に関する超越性の仕事を次のように一般化した。ここで我々は常に次の表記を用いることにする。

G を次元 m の可換代数群としたとき $T_G = T_e G$ を Lie 群 G の origin e における Lie 代数とする。もし G が $\mathbb{C}$ の部分体 K 上で定義されているならば $T_G(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_K T_G$ とする。$\exp_G$ を G の指数写像とする。G は projective space にうめこめるが、その埋めこみは一つ固定する。また $T_G(\mathbb{C})$ の basis により $T_G(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^m$ と同一視できるがこの identification、即ち $T_G(\mathbb{C})$ の basis を一つ固定しておく。$\mathbb{G}_a$ は additive algebraic group, $\mathbb{G}_m$ は multiplicative algebraic group とする。$\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{C}$ 内での代数的閉包とする。

<u>Theorem</u> (Wüstholz [Wü])

G を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された可換代数群とする.
$u \neq 0$ を $T_G(\mathbb{C})$ の点で $\exp_G(u) \in G(\overline{\mathbb{Q}})$ なるものとする。V を $T_G(\mathbb{C})$ の hyperplane で $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されたものとする。$u \in V$ とする。
このとき $0 \neq H \subsetneq G$ なる G の algebraic subgroup で $T_H(\mathbb{C}) \subseteq V$ なるものが存在する。

<u>Corollary</u> (Baker cf. [B])

$\beta_1, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$,
$\alpha_i \neq 0, \neq 1$ $(1 \leq {}^\forall i \leq n)$ とする。
このとき $\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$ は 0 又は超越数である。

Wüstholz の定理から Baker の定理 (上の系) を導くには $G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m^n$ を考えればよい。(cf. [Be])

§2 定量的な結果

定量的な結果を述べるために代数的数の高さの定義を思い出すと次のようになる。

<u>定義</u>　α を代数的数とする。
$P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ をその最小多項式とする。
α の (usual) height $H(\alpha)$ とはこの $P(X)$ の係数の絶対値の最大値のこととする（従って $H(\alpha) \in \mathbb{Z}$）。

さて Baker の定量的な結果は次の形である；

<u>Theorem</u> (Baker, [B])

D, n を自然数とする。$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\neq 0, \neq 1$ とする。次をみたす正定数 C_1（計算可能）が存在する。$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, not all zero, of degree $\leq D$ とする。$H = \underset{0 \leq j \leq n}{\mathrm{Max}} (H(\beta_j), 4)$,
$\Lambda = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$ とおく。
もし $\Lambda \neq 0$ ならば

$$\log |\Lambda| > -c_1 \log H$$

。

注　Bakerの定性的結果より　もし $\beta_0 \neq 0$ ならば $\Lambda \neq 0$ であることがわかる。

一般の代数群上の Philippon − Waldschmidt の結果を次にのべる.

Notations

K　degree D の代数体

G'　K上定義された 可換代数群.

connected と仮定する

さらに

$G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m^{n_1} \times G'$

$\dim G' = n_2$ とし　$\dim G = n+1$ とおく

(従って　$n = n_1 + n_2$)

$u = (u_0, u_1, \dots, u_d) \in T_G(\mathbb{C})$

such that $\exp_G(u) \in G(K)$。

Theorem (Philippon-Waldschmidt [P-W])

上の G, u を考える。次をみたす正定数 c_2 (計算可能)が存在する。$\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n \in K$ not all zero とする. $H = \max_{0 \leq j \leq n} (e, H(\beta_j))$, $\Lambda = \beta_0 u_0 + \cdots + \beta_n u_n$ とおく。もし $\Lambda \neq 0$ ならば

$$\log|\Lambda| > -c_2(\log H)^{n_2+1}$$ 。

このような Wüstholz の定理の定量化は 以前特別な場合ではあるが D. Bertrand によって得られていて その評価は

$$\log|\Lambda| > -c_3(\log H)^{(n+2)!}$$ であった。

Philippon と Waldschmidt はこれを $-c_2(\log H)^{n_2+1}$ に改良したことになる。ここで我々の改良をのべる。$n_2 = 0$ の時には我々は Philippon – Waldschmidt を改良しないので（$n_2 = 0$ の場合は $\log H$ に関しては Baker の評価がすでに best possible である） $n_2 \geq 1$ とする。

Theorem

上の G, u を考える。次をみたす正定数 c_4（計算可能）が存在する。$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ not all zero とする。$H = \underset{0 \leq j \leq n}{\mathrm{Max}}(e^e, H(\beta_j))$, $\Lambda = \beta_0 u_0 + \cdots + \beta_n u_n$ とおく。もし $\Lambda \neq 0$ ならば

$$\log|\Lambda| > -c_4(\log H)(\log\log H)^{n_2+1}$$ 。

従って我々の定理は $\beta_0, \dots, \beta_n$ に関する高さの部分について [P-W] の $|\Lambda|$ の評価を改良したことになる。さらに詳しく定数の C_4 について述べれば、これもほんの少しだけ [P-W] の定数部分を改良している。実際には G の定義体が代数体のときその次数を d とすると、n と d と "G の高さ" (この定義については [D] を参照.) にのみ依る計算可能な正定数 C_5 が存在して、C_4 は C_5 と $D = [\mathbb{Q}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) : \mathbb{Q}]$ と $\exp_G(u) \in G(K)$ の高さ，u の絶対値，$\exp_G$ の order (増大度) の関数として explicit に書ける。

さてわかりやすい系として次をのべる。

Corollary

K を degree D の代数体とする。$\wp$ を Weierstrass の楕円関数で invariants g_2, g_3 は K に属するとする。$u_1, \dots, u_n$ をそれぞれ $\wp$ の代数点，すなわち $\wp$ の pole か又は $\wp(u_i) \in K$ $(1 \le i \le n)$ となるような点とする。次をみたす正定数 C_6 (計算可能) が存在する。$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ not all zero とする。$H = \underset{0 \le j \le n}{\mathrm{Max}}(e^e, H(\beta_j))$ $\Lambda = \beta_0 + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$ とおく。

もし $\Lambda \neq 0$ ならば

$$\log|\Lambda| > -c_6 (\log H)\cdot(\log\log H)^{n+1}。$$

この場合 Philippon-Waldschmidt の定理から導かれる評価は

$$\log|\Lambda| > -c_6' (\log H)^{n+1}$$ であった。

また Yu Kunrui, M. Anderson, J. Coates, S. Lang らの評価はいずれも $\wp$ が complex multiplication をもつ場合で しかも 上の系より悪い評価であった（これらの歴史的流れについては [Y] および [A] に詳しく書かれている）。

特に $u_1, \cdots, u_n$ が $\wp$ の 0でない周期である場合は（cf [H1]）

$$\log|\Lambda| > -c_7 (\log H)(\log\log H)^2$$

となり N. I. Feldman (cf. [R]) の

$$\log|\Lambda| > -c_8 (\log H)^3$$ の改良にあたる。

証明方法は transcendence method, Baker method と呼ばれる今までの方法と同じで、[P-W] を改良するアイデアについては [H2] に述べてある。主たる

アイデアは　補助関数 $F(z) = P(\exp_G)$ を考えたとき ($P \in K[X_0, \ldots X_n]$ とする)
$P(\exp_G) = (z_0$ の多項式$) \times (z_1, \ldots, z_n$ の関数$)$
for $z = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ であることから
z_0 による $F(z)$ の偏微分が何回もくり返されると 0 になるという現象を用いたということである。
このアイデアは古典的な場合にすでに E. Reyssat, Masser, Feldman (cf. [R] および [M]) により考えられているものである。このように主なアイデアはきわめて簡単であるがそれを一般の代数群上に拡張するためにはいくつか微妙な点がある。

References

[A] Anderson, M. - Inhomogeneous linear forms in algebraic points of an elliptic function, in Transcendence Theory: Advances and Applications (eds. A. Baker and D.W. Masser) Academic Press (1977) p 121 - 143.

[B] Baker, A. - The theory of linear forms in logarithms, in Transcendence Theory: Advances and Applications (eds. A. Baker and D.W. Masser) Academic Press (1977) p 1 - 28.

[Be] Bertrand, D. - Lemmes de zéros et nombres transcendant, Séminaire Bourbaki, 38^e année, 1985-86, Astérisque, vol 145-146 (1987) p21-44.

[D] David, S - Théorie de Baker pour des familles de groupes algébriques commutatif, Chap 2, Thèse de doctrat, Univ de Paris VI (1989)

[H1] Hirata-Kohno, N. - Mesures de transcendance pour les quotients de périodes d'intégrales elliptiques, to appear in Acta Arithmetica 56, No. 2.

[H2] Hirata-Koho, N. - Diophantine approximations for periods of elliptic functions, preprint

[M] Masser, D.W. - Elliptic functions and transcendence, Lec. Notes in Math., 437, Springer-Verlag (1975)

[P-W] Philippon, P. and Waldschmidt, M. - Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques, Illinois J. Math, 32, No. 2 (1988) p 281-314

[R] Reyssat, E. - Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle. Bull. Soc. Math. France. 108 (1980) p 47-79.

[Wü] Wüstholz, G. - Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen, Annals of Math., 129 (1989) p. 501-517.

[Y] Yu Kunrui - Linear forms in elliptic logarithms. J. Number Theory 20 (1985) p 1-69.